Feladat 1. Határozza meg a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ gyűrű részgyűrűit és ideáljait.

Megoldás: Nézzük az additív részcsoportokat, elemszámok szerint csoportosítva. Egy additív részcsoport nem részgyűrű, ha nem zárt a szorzásra, részgyűrű, de nem ideál, ha zárt a (belső) szorzásra, de nem zárt minden külső elemmel való szorzásra, és ideál, ha zárt akármilyen elemmel vett szorzásra. (A szögletes zárójel itt generált részcsoportot, nem generált részgyűrűt jelöl.)

- Az egyelemű részcsoport $\{00\}$.
- Kételemű részcsoportot a másodrendű elemek generálnak, ilyenből egy van, $[03]$ pedig ideál.
- Háromelemű részcsoportot a harmadrendű elemek generálnak, ilyenből nyolc van, ami négy harmadrendű részcsoport jelent: $[02] = \{00, 02, 04\}$, $[10] = \{00, 10, 20\}$, [12]={00,12,24}, és [14]={00,14,22}. (A harmadik nem részgyűrű, mert $12 \cdot 12 = 14$, a negyedik az, de nem ideál, mert $14 \cdot 10 = 10$.)
- Hatelemű részcsoportot a hatodrendű elemek generálnak, ilyenből nyolc van, ami négy hatorendű részcsoport jelent: $[01] = \{00, 01, 02, 03, 04, 05\}$, $[11] = \{00, 11, 22, 03, 14, 25\}$, $[13] = \{00, 13, 20, 03, 10, 23\}$, és $[15] = \{00, 15, 24, 03, 12, 21\}$.
- Kilencedrendű elem nincs a csoportban, viszont a páratlan rendű elemek egy $\mathbb{Z}_3^2$-tel izomorf részcsoportot adnak: $[02, 10] = \{00, 02, 04, 10, 12, 14, 20, 22, 24\}$.
- Ott van még $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$.

Feladat 2. Határozza meg a $\mathbb{Z}_4^2$ gyűrű részgyűrűit és ideáljait.

Megoldás: Felsoroljuk $\mathbb{Z}_4^2$ additív részcsoportjait, a táblázat szerint 15 van belőlük:

- $\{00\}$
- $[02] = \{00, 02\}$
- $[20] = \{00, 20\}$
- $[22] = \{00, 22\}$
- $[01] = \{00, 01, 02, 03\}$
- $[10] = \{00, 10, 20, 30\}$
- $[11] = \{00, 11, 22, 33\}$
- $[12] = \{00, 12, 20, 32\}$
- $[21] = \{00, 21, 02, 23\}$
- $[13] = \{00, 13, 22, 31\}$
- $[02, 20] = \{00, 02, 20, 22\}$
- $[01, 20] = \{00, 01, 02, 03, 20, 21, 22, 23\}$
- $[10, 02] = \{00, 10, 20, 30, 02, 12, 22, 32\}$
- $[11, 02] = \{00, 02, 11, 13, 20, 22, 31, 33\}$
- $[01, 10] = \mathbb{Z}_4^2$

Feladat 3. Direkt felbontható az $\mathbb{R}[x]$ gyűrű?

Megoldás: A test feletti egyhatározatlanú polinomgyűrűk úgynevezett *főideálgyűrűk (principal ideal domain, PID)*, vagyis olyan egységelemes kommutatív gyűrűk, amiben minden ideál egy adott adott elemmel osztható elemek halmaza. Tehát ha $\mathbb{R}[x] = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$, akkor vannak olyan p_1, p_2 polinomok, hogy $I_1 = p_1\mathbb{R}[x]$ és $I_2 = p_2\mathbb{R}[x]$. Viszont ekkor $p_1 p_2 \in I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$. Direkt szorzat tényezőinek metszete triviális, tehát $p_1 p_2 = 0$, így pedig $\mathbf{I}_1$ vagy $\mathbf{I}_2$ triviális ideál.

Feladat 4. Van-e a $\mathbb{C}$ gyűrűnek direkt felbontható részgyűrűje?

Megoldás: Nincs. $\mathbb{C}$ zérusosztómentes, így minden részgyűrűje zérusosztómentes. Zérusosztómentes gyűrűben bármely két nemtriviális ideál szorzata nemtriviális, és így metszetük is az.

Feladat 5. Határozza meg a $\mathbb{Z}_2$ feletti 2×2-es mátrixok gyűrűjének automorfizmuscsoportját.

Megoldás: Egy automorfizmust meghatároz a gyűrű egy generátorrendszerén felvett értékeinek halmaza. A $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ gyűrűnek van kételemű generátorrendszere: $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$. A $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix olyan, aminek a harmadik hatványa a gyűrű multiplikatív egységeleme, de ő maga nem az. Rajta kívül csak egy ilyen mátrix van a gyűrűben: $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ mátrix olyan, a nullmátrixtól és az egységmátritól különböző mátrix, amelynek négyzete önmaga. Hat darab ilyen mátrix van.

Ezzel a lehetséges automorfizmusok számát 12-re szűkítettük. Ezeket egy táblázatban kiszámoltuk. El kell dönteni, hogy ezek közül melyek ténylegesen automorfizmusok.

A piros oszlopokban lévő jelöltekről jól látszik, hogy nem automorfizmusok: nem tartják a $\{B_1, \ldots, B_6\}$ halmazt. A zöld oszlopokban viszont automorfizmusok vannak. Ezt onnan lehet legegyszerűbben látni, hogy minden invertálható C mátrixra az $X \to C^{-1}XC$ leképezés gyűrűautomorfizmus. Ez különböző X-ekre különböző leképezéseket ad: ha az X-szel és az Y-nak való konjugálás egybeesik, akkor az Y^{-1}-zel való konjugálás triviális, így az XY^{-1} minden mátrixszal felcserélhető, tehát (mivel invertálható) az egységmátrix. Így a mátrixgyűrűnek van legalább hat automorfizmusa. Mivel pont ennyi jelöltünk maradt, ezek valóban automorfizmusok. (Egyébként ezek rendre az E, A_2, A_1, T_2, Q, T_1 mátrixokkal való konjugálások.)

$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2
$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
$Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z
$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_2	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1	A_1
$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	T_1	N_3	Q	N_1	N_2	T_2	N_2	Q	N_3	T_2	T_1	N_1
$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	Q	B_6	T_2	B_1	B_3	T_1	B_4	T_1	B_5	Q	T_2	B_2
$T_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	T_2	B_5	T_1	B_2	B_4	Q	B_3	T_2	B_6	T_1	Q	B_1
$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	N_1	B_1	N_2	B_3	B_6	N_3	B_2	N_1	B_4	N_2	N_3	B_5
$B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	B_2	N_1	B_4	N_2	N_3	B_5	N_1	B_1	N_2	B_3	B_6	N_3
$N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	N_2	Q	N_3	T_2	T_1	N_1	T_1	N_3	Q	N_1	N_2	T_2
$B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	B_3	T_2	B_6	T_1	Q	B_1	T_2	B_5	T_1	B_2	B_4	Q
$B_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	B_4	T_1	B_5	Q	T_2	B_2	Q	B_6	T_2	B_1	B_3	T_1
$B_5 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	B_5	B_3	B_2	B_6	B_1	B_4	B_5	B_3	B_2	B_6	B_1	B_4
$B_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	B_6	N_2	B_1	N_3	N_1	B_3	N_3	B_4	N_1	B_5	B_2	N_2
$N_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	N_3	B_4	N_1	B_5	B_2	N_2	B_6	N_2	B_1	N_3	N_1	B_3